ÜBER EINE ALGEBRAISCHE THEORIE

DER SCHAAREN

NICHTADJUNGIRTER BERÜHRUNGSCURVEN

WELCHE

ZU EINER ALGEBRAISCHEN CURVE GEHÖREN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DES DOKTORGRADES

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

KÖNIGLICH BAYERISCHEN FRIEDRICH-ALEXANDERS-UNIVERSITÄT

ZU

ERLANGEN

VORGELEGT VON

WILHELM WEISS.

PRAG, 1890.

ÜBER EINE ALGEBRAISCHE THEORIE

DER SCHAAREN

NICHTADJUNGIRTER BERÜHRUNGSCURVEN

WELCHE

ZU EINER ALGEBRAISCHEN CURVE GEHÖREN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DES DOKTORGRADES

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

KÖNIGLICH BAYERISCHEN FRIEDRICH-ALEXANDERS-UNIVERSITÄT

ZU

ERLANGEN

VORGELEGT VON

WILHELM WEISS.

PRAG, 1890.

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn

Prof. Dr. Max Nöther

durch dessen persönlichen Verkehr und Vorlesungen mir vielfache Anregung und Förderung zu Theil wurde

dankbar gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545817_0069

Aus den Sitzungsberichten d. kais. Akademie d. Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Classe; Bd. XCIX. Abth. II. a. März 1890.

Über eine algebraische Theorie der Schaaren nicht-adjungirter Berührungscurven, welche zu einer algebraischen Curve gehören

von

Wilhelm Weiss,

Assistent für Mathematik an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1890.)

Die Theorie der zu einer algebraischen Curve gehörigen Berührungscurven ist bekanntlich von Hesse begründet und seither vielfach behandelt worden. Sie fand, wenigstens für den einfachen Fall, dass die Grundcurve nur Doppel- und Rückkehrpunkte besitzt und die Berührungscurven diese enthalten, ihre erste allgemeine Erledigung durch Clebsch in dessen fundamentaler Arbeit: „Über die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie", Crelle's Journal, Bd. 63. In natürlicher Fortsetzung der hier entwickelten Ideen versuchte Clebsch auch diejenigen Berührungscurven zu behandeln, welche die vielfachen Punkte der Grundcurve nur theilweise oder gar nicht enthalten. Mit Hilfe der von ihm, für Curven vom Geschlechte 0 und 1 mittelst rationaler oder doppelt-periodischer Functionen durchgeführten Parameterdarstellung gelang es in der That leicht, den adjungirten Berührungscurven die Bedingung aufzuerlegen, sich in einem oder mehreren der Doppelpunkte nicht-adjungirt zu verhalten.

Damit war in diesen speciellen Fällen die Theorie erledigt. Es ist aber klar, dass diese Behandlung eine Ausdehnung auf Curven von beliebigem Geschlechte zunächst ausschloss.

Für die letzteren fand nun diese Theorie wiederum für den oben angegebenen einfachsten Fall ihre vollständige Erledigung durch das erweiterte Jacobi'sche Umkehrproblem (Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen 271 f. f.)

In neuerer Zeit wurde der erste Clebsch'sche Gedanke wieder aufgenommen, und zwar durch Herrn G. Humbert in einer ausführlichen Arbeit: Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques. Liouville's Journal 1886.

Herr Humbert geht aus von der durch H. Poincaré für Curven von beliebigem Geschlechte begrifflich durchgeführten Parameterdarstellung mit Hilfe Fuchs'scher Functionen und gelangt wie Clebsch von den adjungirten Berührungscurven zu jenen, welche die Doppelpunkte der Grundcurve nur theilweise enthalten.

Indessen zeigt sich bei weiterem Eingehen in die angeführten Arbeiten, dass die verwendeten transcendenten Beziehungen im Grunde nur algebraische Beziehungen zwischen allgemeinen und speciellen rationalen Functionen des Ortes auf der Riemann'schen Fläche sind.

Man darf daher erwarten, dass sich die Theorie der nichtadjungirten Berührungscurven, selbst bei beliebigen vielfachen Punkten der Grundcurve auf algebraischem Wege aus der als bekannt vorausgesetzten Theorie der adjungirten Berührungscurven wird entwickeln lassen.

Dieses Ziel strebt die vorliegende Arbeit an. Sie stützt sich überall auf die bekannte Brill-Nöther'sche Theorie der algebraischen Functionen und benützt überdies vielfältig die Ideen und Resultate, welche in der grundlegenden Arbeit von Nöther: Über die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nichtadjungirten Curven, Math. Annalen, Bd. 15, ausgesprochen sind.

Man gelangt so auf einheitliche Weise nicht nur zu allen bekannten und manchen neuen Resultaten dieser Theorie, sondern dehnt dieselbe ohne zu grosse Schwierigkeiten auch auf Curven mit höheren vielfachen Punkten aus, wovon der demnächst zu behandelnde Fall einer Grundcurve mit höheren Singularitäten als Beispiel dienen mag.

Aus dem Angeführten wird ersichtlich, dass das Nachfolgende auch als eine algebraische Vorarbeit für die Behandlung des allgemeinen erweiterten Umkehrproblems in der Theorie der Abel'schen Functionen aufgefasst werden kann; ich gedenke hierauf näher zurückzukommen.

Zu den vorliegenden Untersuchungen wurde ich durch die Vorlesungen und den persönlichen Verkehr des Herrn Professors Dr. Nöther angeregt. Ich ergreife darum diese Gelegenheit, um demselben meinen ergebensten Dank auszusprechen.

§. 1.

Über Theilschaaren.

Es sei $f(s, z) = 0$ eine irreducible algebraische Curve von der Ordnung n, welche in $a_1, a_2 \ldots$ gewöhnliche $k_1, k_2 \ldots$-fache Punkte haben möge.

Das Geschlecht derselben ist

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\sum_i k_i(k_i-1).$$

Ist G_Q eine Gruppe von Q Punkten auf f, so ist durch dieselbe bekanntlich eine Corresidualschaar bestimmt. Man lege nämlich durch G_Q eine Curve $\chi^{(0)}$, welche einen k_i-fachen Punkt von f zum ρ_i-fachen Punkte haben möge.

Ist G_R der weitere Schnitt von $\chi^{(0)}$ und f, der nicht in die vielfachen Punkte von f fällt, so schneidet die Schaar

$$\chi \equiv \lambda_0\chi^{(0)} + \lambda_1\chi^{(1)} + \ldots + \lambda_r\chi^{(r)}$$

von Curven gleicher Ordnung und Art wie $\chi^{(0)}$ auf f eine zu G_Q gehörige Corresidualschaar γ_Q aus.

Es lässt sich leicht zeigen, dass man die allgemeinste zu G_Q gehörige Corresidualschaar erhält, wenn man zum Ausschneiden adjungirte Curven verwendet ($\rho_i = k_i - 1$).

Ist nämlich $\psi^{(0)}$ eine adjungirte Curve durch G_Q (mit G_R als Restgruppe), so besteht die Identität:

$$\psi^{(0)}\chi \equiv \psi\chi^{(0)} + Bf, \qquad 1)$$

wo ψ und B ganze Functionen von s, z sind.

Das Product $\psi^{(0)}\chi$ verschwindet nämlich an jeder einfachen gemeinsamen Stelle von $\chi^{(0)} = 0$ und $f = 0$ einfach und im k_i-fachen Punkte von f in der Ordnung $k_i + \rho_i - 1$. Daher sind nach dem Nöther'schen Fundamentalsatze der Theorie der algebrai-

schen Functionen (Math. Annalen, Bd. 6, S. 353) durch $\psi^{(0)}\chi$ alle nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zum Bestehen der Identität 1) identisch erfüllt.

Man findet durch Discussion von 1), dass $\psi(s,z)=0$ eine Schaar adjungirter Curven gleicher Ordnung mit $\psi^{(0)}$ durch $G_{R'}$ darstellt, welche die Parameter λ genau so enthält wie $\chi=0$ und daher auf $f=0$ gerade die Schaar γ_Q ausschneidet.

Dies gibt den von Nöther[1] auch auf Curven mit ganz beliebigen singulären Punkten ausgedehnten Satz:

Jede zu G_Q gehörige Coresidualschaar lässt sich durch adjungirte Curven ausschneiden.

Man nennt darum die von allen adjungirten Curven durch $G_{R'}$ auf f ausgeschnittene Schaar: die zu G_Q gehörige Vollschaar g_Q^q.

Es ist bekannt, dass diese Vollschaar vermöge des Restsatzes[2] eine von speciellen ausschneidenden Curven unabhängige Existenz hat.

Es ist aber umgekehrt im Allgemeinen nicht möglich, die zu G_Q gehörige Vollschaar g_Q^q durch andere als durch adjungirte Curven auszuschneiden.

Es sei

$$\psi \equiv \lambda_0\psi^{(0)}+\lambda_1\psi^{(1)}+\ldots\lambda_q\psi^{(q)}$$

die ganze Schaar adjungirter Curven durch die Restgruppe $G_{R'}$ von $\psi^{(0)}$.

Bedeutet nun $\chi^{(0)}$ eine Curve durch G_Q, welche in a_i einen k_i-1+j_i-fachen Punkt hat, so besteht aus denselben Gründen wie vorher die Identität:

$$\chi^{(0)}\psi \equiv \chi\psi^{(0)}+K.f, \qquad 2)$$

worin $\chi(s,z)=0$ eine Curvenschaar gleicher Ordnung mit $\chi^{(0)}$ durch den Restschnitt der letzteren mit f darstellt.

Würde nun aus 2) folgen, dass sämmtliche Curven der Schaar $\chi(s,z)=0$ den k_i-fachen Punkt a_i von f zum gewöhnlichen k_i-1+j_i-fachen Punkte haben müssen, dann und nur dann hätte

---

[1] Math. Annalen, Bd. 23, S. 349.

[2] Brill und Nöther, Math. Annalen, Bd. 7, S. 272.

man bezüglich der Vollschaar g_Q^n die adjungirte Schaar ψ durch die überadjungirte Schaar χ ersetzt. Allein eine einfache Discussion von 2) oder die Entwicklung in der Nähe der k_i-fachen Stelle von f zeigt, dass die Curven von $\chi(s, z) = 0$ im Punkte a_i von f nur einen k_i-fachen Punkt haben und je ein Zweig von χ mit einem Zweige von f noch weitere $j_i - 1$ gemeinsame Punkte besitzt. Von diesen Curven bilden aber jene, welche in a_i einen $k_i - 1 + j_i$-fachen Punkt haben, den Fall $j_i = 1$ ausgenommen, nur einen Theil, und die von ihnen auf $f(s, z) = 0$ ausgeschnittene lineare Schaar ist daher auch nur ein Theil der gegebenen Vollschaar.

Verwendet man aber alle Curven der Schaar χ, so erhält man zwar die Vollschaar, hat aber im Wesentlichen nichts Neues, da diese Curven als adjungirt nur mit speciell gewordenem Reste anzusehen sind.

Die zu G_Q gehörige Vollschaar kann aber auch nicht durch Curven ausgeschnitten werden, welche einen k_i-fachen Punkt von f zum gewöhnlichen σ_i-fachen Punkte haben $\sigma_i < k_i - 1$.[1]

Ist nämlich $\chi^{(0)}$ eine σ-Curve durch G_Q, so müsste, wenn die Vollschaar durch σ-Curven ausschneidbar sein soll, die Identität

$$\chi^{(0)}\psi \equiv \chi\psi^{(0)} + Lf$$

ohne Bedingungen für die Parameter der Schaar ψ bestehen. Aber das Product $\chi^{(0)}\psi$ erfüllt die dazu in den vielfachen Punkten von f nothwendigen Bedingungen des Nöther'schen Theorems nicht identisch, und es müssen die Willkürlichkeiten der Ausgangscurve $\chi^{(0)}$ benützt werden, um diese Bedingungsgleichungen zu erfüllen.

Da aber in diese Gleichungen die Parameter der Schaar ψ eingehen, kann man so selbst bei der angegebenen speciellen Bestimmmung der ersten σ-Curve $\chi^{(0)}$ im Allgemeinen nur einen Theil der Vollschaar erhalten.

Dies gilt daher umsomehr, wenn die Ausgangscurve $\chi^{(0)}$ beliebig angenommen wird.

---

[1] Diese Curven sollen nach Nöther, Math. Annalen, Bd. 15, σ-Curven genannt werden.

§. 2.

Bedingungsgleichungen für das nichtadjungirte Verhalten.

Es sei $\chi^{(0)}$ eine durch die Gruppe G_Q auf $f=0$ gelegte σ-Curve, Γ_R sei ihre Restgruppe und

$$\chi \equiv \mu_0 \chi^{(0)} + \mu_1 \chi^{(1)} + \ldots \mu_\nu \chi^{(\nu)}$$

die ganze lineare Schaar der σ-Curven gleicher Ordnung mit $\chi^{(0)}$ durch Γ_R. Dann schneidet $\chi^{(0)}\chi$ auf f die vollkommen definirte Schaar γ_Q aus.

Ferner bedeute $\psi^{(0)}$ eine adjungirte Curve durch G_Q, G_R ihren Rest und

$$\psi \equiv \lambda_0 \psi^{(0)} + \lambda_1 \psi^{(1)} + \ldots \lambda_\nu \psi^{(\nu)}$$

die ganze Schaar adjungirter Curven durch G_R. Durch $\psi^{(0)}\psi$ ist auf f die zu G_Q gehörige Vollschaar g_Q bestimmt.

Aus §. 1 folgt, dass die γ_Q im Allgemeinen als Theil in der Vollschaar g_Q enthalten ist. Für unsere Zwecke ist es nothwendig, aus der Schaar ψ gerade den Theil auszusondern, welcher auf f denselben beweglichen Schnitt besitzt[1] wie χ.

Dazu haben die Parameter λ von ψ gewisse Bedingungsgleichungen zu erfüllen, welche in den λ linear sein müssen, da sowohl g_Q wie γ_Q lineare Schaaren sind.

In der angeführten Arbeit von Nöther (Math. Annalen, Bd. 15) wird nur die Anzahl der für das nichtadjungirte Verhalten nothwendigen Bedingungen wesentlich, und der dort eingehaltene Weg ist zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen selbst weniger geeignet und soll darum hier durch einen directen ersetzt werden. Zunächst besteht nach §. 1 die Identität:

$$\psi^{(0)}\chi \equiv \psi'\chi^{(0)} + Mf. \qquad 1)$$

Der Schnitt von ψ mit f reducirt sich daher auf den von χ mit f, wenn man die Identität

[1] Functionentheoretisch bedeutet dies die Reduction der allgemeinsten rationalen Function des Ortes auf der Riemann'schen Fläche $f(s,z)=0$ auf eine solche, die in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten der Fläche ein vorgeschriebenes specielles Verhalten hat.

$$\psi\chi^{(0)} \equiv \chi\psi^{(0)} + Mf \qquad 2)$$

erfüllen kann.

Diese letztere findet aber, weil $\psi\chi^{(0)}$ in einem k_i-fachen Punkte von $f = 0$ nur $k_i + \sigma_i - 1$-fach verschwindet, nicht von selbst statt, sondern kann nur dadurch bestehen, dass die Parameter von ψ allen Bedingungsgleichungen genügen, welche das Nöther'sche Theorem in jedem vielfachen $\psi^0 = 0$ und $f = 0$ gemeinsamen Punkte vorschreibt.

Wir benützen dasselbe jetzt und in allem Folgenden in der Form (Math. Annalen, Bd. 15, S. 509):

„Soll für eine Function $F(s, z)$ eine Identität von der Form:

$$F(s, z) \equiv A(s, z)\varphi + B(s, z)f$$

bestehen, so ist nothwendig und hinreichend, dass für jede gemeinsame Stelle von $\varphi(s, z) = 0$ und $f(s, z) = 0$ zwei ganze Functionen $A'(s, z)$, $B'(s, z)$ von unbegrenzter Ordnung gefunden werden können, so dass in der Umgebung dieser Stelle besteht:

$$f(s, z) \equiv A'\varphi + B'f,$$

wo die beiderseitigen aufsteigenden Entwicklungen bis zu den Gliedern beliebiger Dimension identisch gemacht werden können bei zunächst unbestimmt gelassenen Constanten in A' und B'."

Es sei nun die Stelle $z = 0$, $s = 0$ eine k-fache für $f = 0$ und σ-fach für $\psi^{(0)}$.

Dann ist zum Bestehen der Fundamentalidentität 2) nothwendig, dass in der Umgebung von $s = 0$, $z = 0$

$$\psi\chi^{(0)} \equiv A'(s, z).\psi^{(0)} + B'(s, z)f, \qquad 4)$$

sei, wo $A'(s, z)$, $B'(s, z)$ die obige Bedeutung haben sollen.

Dabei mögen die Functionen f, $\chi^{(0)}\psi^{(0)}\psi$ in $s = 0$, $z = 0$ die Entwicklungen haben:

$$\begin{aligned} f &\equiv f_k + f_{k+1} + f_{k+2} + \dots \\ \chi^{(0)} &\equiv \chi^{(0)}_\sigma + \chi^{(0)}_{\sigma+1} + \dots \\ \psi^{(0)} &\equiv \psi^{(0)}_{k-1} + \psi^{(0)}_k + \psi^{(0)}_{k+1} + \dots \\ \psi &\equiv \psi_{k-1} + \psi_k + \psi_{k+1} + \dots \end{aligned}$$

hierin möge sein:

$$\begin{aligned}
f_k &\equiv f_{k,0}\,z^k + f_{k,1}\,z^{k-1}s + \ldots + f_{k,k}\,s^k \\
&\vdots \\
\chi^{(0)}_\sigma &\equiv \chi^{(0)}_{\sigma,0}\,z^\sigma + \chi^{(0)}_{\sigma,1}\,z^{\sigma-1}s + \ldots + \chi^{(0)}_{\sigma,\sigma}\,s^\sigma \\
&\vdots \\
\psi^{(0)}_{k-1} &\equiv \psi^{(0)}_{k-1,0}\,z^{k-1} + \psi^{(0)}_{k-1,1}\,z^{k-2}s + \ldots + \psi^{(0)}_{k-1,k-1}\,s^{k-1} \\
&\vdots \\
\psi_{k-1} &\equiv \psi_{k-1,0}\,z^{k-1} + \psi^{(0)}_{k-1}\,z^{k-2}s + \ldots + \psi_{k-1,k-1}\,s^{k-1}. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Da $\psi\chi^{(0)}$ in $s=0$, $z=0$ von niedrigerer Ordnung als $k+\sigma$ verschwindet, ist für $A'(s,z)$, $B'(s,z)$ nur die Entwicklung zulässig:

$$\begin{aligned}
A'(s,z) &\equiv A'_\sigma + A'_{\sigma+1} + \ldots \\
B'(s,z) &\equiv B'_{\sigma-1} + B'_{\sigma-2}
\end{aligned}$$

wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit von $\psi^{(0)}$ und f an jeder gemeinsamen Stelle.

Hier bedeuten wie oben:

$$\begin{aligned}
A'_\sigma &\equiv A'_{\sigma,0}\,z^\sigma + A'_{\sigma,1}\,z^{\sigma-1}s + \ldots + A'_{\sigma,\sigma}\,s^\sigma \\
&\vdots \\
B'_{\sigma-1} &\equiv B'_{\sigma-1,0}\,z^{\sigma-1} + B'_{\sigma-1,1}\,z^{\sigma-2}s + \ldots + B_{\sigma-1,\sigma-1}\,s^{\sigma-1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

und $A'_{\sigma,0}$, $A'_{\sigma,1}$ … $B'_{\sigma-1,0}$, $B'_{\sigma-1,1}$ … sind zunächst völlig unbestimmt gelassene Constante.

Durch beiderseitige Vergleichung ergeben sich aus 4) folgende Identitäten, die sämmtlich zu erfüllen sind:

$$\psi_{k-1}\chi^{(0)}_\sigma \equiv A'_\sigma\psi^0_{k-1} + B'_\sigma f_k \qquad 4')$$

$$\psi_k\chi^{(0)}_\sigma + \psi_{k-1}\chi^{(0)}_{\sigma+1} \equiv A'_{\sigma+1}\psi^{(0)}_{k-1} + A'_\sigma\psi^{(0)}_k + B'_\sigma f_k + B'_{\sigma-1}f_{k+1} \qquad 4'')$$

$$\psi_{k+1}\chi^0_\sigma + \ldots \equiv A'_{\sigma+2}\psi^0_{k-1} + \ldots + B'_{\sigma+1}f_k + \ldots \qquad 4''')$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Die Identität 4') führt zu $k+\sigma$ linearen Gleichungen zwischen allen Coëfficienten, und da zur Erfüllung dieses Gleichungssystems

nur über die $2\sigma+1$ Constanten $A_{\sigma,0}, A_{\sigma,1} \ldots B_{\sigma-1,0} \ldots$ verfügt werden kann, folgen durch Elimination $k-\sigma-1$ lineare Bedingungsgleichungen, die somit nur für die einzigen noch freie Parameter enthaltenden Grössen $\psi_{k-1,0}, \psi_{k-1,1} \ldots \psi_{k-1,k-1}$. Bedingungen vorstellen.

Die Gleichungen haben die Form:

$$\sum_{0}^{x-1}{}_{j} C_j^{(i)} \psi_{k-1-j,j} = 0, \qquad (i=1,2,\ldots k-\sigma-1)$$

wo die $C^{(i)}$ nur die Coëfficienten von χ^0, ψ^0 und f enthalten und setzen sich vermöge der Bedeutung von ψ in Gleichungen von der Form:

5.) $$\sum_{j=0}^{r} C_j^{(\nu)} \lambda_j = 0 \qquad (\nu=1,2,\ldots k-\sigma-1)$$

zwischen den Parametern $\lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_r$ von ψ um.

Analog führt $4''$, $4'''$... zu $k-\sigma-2$, $k-\sigma-3$ ... linearen Bedingungsgleichungen zwischen den λ.

Da die Glieder $2k-2$. Dimension von $\psi\chi^0$ schon ganz willkürlich gewählt werden können (Nöther'sches Theorem, Math. Ann., Bd. 6, S. 353), ist die letzte Identität, die an der Stelle $s=0$, $z=0$ noch Bedingungen gibt, die folgende:

$$\psi_{2k-3-\sigma}\chi^{(0)} + \ldots \psi_{k-1}\chi^{(0)}_{k-2} = A'_{k-2}\psi^0_{k-1} + \ldots + A'_\sigma \psi^0_{2k-3-\sigma} + \\ + B'_{k-3} f_k + \ldots + B'_{\sigma-1} f_{2k-2-\sigma}$$

und diese liefert eine Bedingungsgleichung für die λ.

Man erhält daher in Folge der Identitäten von der Dimension: $k+\sigma-1$, $k+\sigma$, $k+\sigma+1$ ... $2k-3$, beziehungsweise $k-\sigma-1$, $k-\sigma-2$, ... 1, daher im Ganzen $\frac{1}{2}(k-\sigma)(k-\sigma-1)$ lineare homogene Gleichungen für die Parameter $\lambda_0 \ldots \lambda_r$ der Schaar ψ.

Die letzte obige Identität veranlasst eine für die nichtadjungirten Schaaren überhaupt wesentliche Bemerkung. Die Gleichungen 5) sind nämlich alle identisch, also ohne Bedingungen für die λ, dadurch zu erfüllen, dass man $\chi^{(0)}_\sigma \equiv 0$, $\chi^{(0)}_{\sigma+1} \equiv 0 \ldots$ $\chi^{(0)}_{k-2} = 0$ wählt, eine Aussage, die sich mit dem Restsatze für adjungirte Schnittpunktsysteme deckt.

Im Falle der eigentlichen σ-Curven steigen aber diese Gleichungen auch wirklich bis zu den Coëfficienten von $\chi^{(0)}_{k-2}$ an. Soll daher die durch $\chi^{(0)}\chi$ auf $f=0$ ausgeschnittene σ-Schaar γ_Q auch durch eine andere Schaar von σ-Curven $\chi^{(0)\prime}\chi'$ ausgeschnitten werden können, so dürfen sich doch die Gleichungen, welche an der Stelle $s=0, z=0$ die Schaar g_Q auf die Schaar γ_Q reduciren, nicht ändern, wenn man statt der $\chi^{(0)}$ die $\chi^{(0)\prime}$ benützt. Daraus aber folgt, dass bei den σ-Schaaren, im Gegensatze zu den adjungirten, die neue Ausgangscurve $\chi^{(0)\prime}$ nicht mehr ganz willkürlich genommen werden kann, sondern an der Stelle $s=0$, $z=0$ gegen die alte Ausgangscurve $\chi^{(0)}$ ein specielles Verhalten haben muss, für welches $\chi^{(0)\prime}$ Bedingungen bis hin zu den Gliedern $k-2$. Dimension zu erfüllen hat.

(Vergl. auch Nöther, l. c. Restsatz für σ-Curven.)

Der Fall $\sigma=0$ erfordert eine gesonderte Betrachtung. Die Untersuchung des Systems von Bedingungsgleichungen in $s=0$, $z=0$ zeigt nämlich, dass sobald für $\chi^{(0)}$ an dieser Stelle die Entwicklung besteht: $\chi^{(0)}=\chi^{(0)}_0+\chi^{(0)}_1+\ldots$ die Constanten von $\chi^{(0)}$ nur scheinbar in die Gleichungen eintreten. Indessen lässt sich diese Untersuchung hier, wie auch in den Anwendungen auf die Berührungscurven, die keine vielfachen Punkte der Grundcurve enthalten, umgehen und der Fall wesentlich einfacher behandeln, wenn man dem Nöther'schen Fundamentalsatze folgende Bemerkung hinzufügt:

Es habe F, φ, f, A, B dieselbe Bedeutung wie auf S. 7, und es sei $s=0$, $z=0$ die dort vorausgesetzte gemeinsame Stelle von $\varphi=0$ und $f=0$. F sei aber jetzt ein Product zweier Functionen von s, z

$$F(s,z)\equiv F_1(s,z).F_2(s,z),$$

von denen $F_2(s,z)$ an der Stelle $s=0$, $z=0$ nicht verschwinden möge.

Für die Identität:

$$F_1F_2=A\varphi+Bf$$

ist an dieser Stelle bekanntlich nothwendig und hinreichend:

$$F_1F_2\equiv A'(s,z)\varphi+B'(s,z)f,$$

worin $A'(s,z)$, $B'(s,z)$ Potenzreihen in s, z sind. Daher muss im vorliegenden Falle wegen $F_2 \neq 0$ auch bestehen:

$$F_1 \equiv \frac{A'}{F_2}\varphi + \frac{B'}{F_2}f$$

oder

$$F_1 \equiv A''\varphi + B''f,$$

worin A'' und B'' ebenfalls unbegrenzte Entwicklungen in s, z darstellen. Daher hat man:

Soll das Product $F_1(s,z).F_2(s,z)$ in der Form $A\varphi+Bf$ darstellbar sein, so sind die dazu in $s=0$, $z=0$ nothwendigen und hinreichenden Bedingungen von $F_1(s,z)$ allein zu erfüllen, wenn $F_2(0,0) \neq 0$ ist.

Die Identität 4)

$$\psi\chi^{(0)} \equiv A'(s,z)\psi^{(0)} + B'(s,z)f,$$

welche in $s=0$, $z=0$ die Bedingungsgleichungen für die „λ“ liefert, geht daher im Falle $\sigma=0$ einfach in die folgende über

$$\psi \equiv A''(s,z)\psi^0 + B''(s,z)f, \qquad 4a)$$

wo A'', B'' die Entwicklungen haben:

$$A''(s,z) \equiv A_0'' + A_1'' + \ldots$$
$$B''(s,z) \equiv B_0'' + B_1'' + \ldots$$

Man erhält eine Reihe von Identitäten analog jenen 4′)

$$\begin{aligned}
\psi_{k-1} &\equiv A_0''\psi_{k-1}^{(0)} \\
\psi_k &\equiv A_1\psi_{k-1}^{(0)} + A_0''\psi_k^{(0)} + B_1''f_k \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\psi_{2k-3} &\equiv A_{k-2}''\psi_{k-1}^0 + \ldots\ldots B_{k-3}''f_k
\end{aligned}$$

welche beziehungsweise $k-1$, $k-2$, … 1, daher im Ganzen $\frac{1}{2}k(k-1)$ Bedingungsgleichungen ergeben, wie es sein muss.

Ähnliche Betrachtungen wie in $s=0$, $z=0$ sind für jeden k_i-fachen Punkt von f, der σ_i-fach für $\chi^{(0)}$ ist, durchzuführen, so dass folgt:

Zur vollständigen Reduction der Vollschaar g_Q auf die Theilschaar γ_Q haben die Parameter $\lambda_0 \ldots \lambda_r$ der Schaar $\lambda_0\psi^{(0)} + \lambda_1\psi^{(1)} + \ldots + \lambda_r\psi^{(r)}$ im Allgemeinen $\frac{1}{2}\sum (k_i - \sigma_i)(k_i - \sigma_i - 1)$ den Gleichungen analoge Bedingungsgleichungen zu erfüllen.

Diese Zahl ist aber nur als obere Grenze aufzufassen, da die Gleichungen nicht alle von einander unabhängig zu sein brauchen. Es ist wegen der Anwendung auf die Systeme der Berührungscurven nothwendig, darüber genaue Entscheidungen zu haben. Die Mittel dazu enthält §. 4.

§. 3.

Specielle Fälle.

I. Die Grundcurve f habe nur Doppelpunkte.

Es mögen hier f, $\chi^{(0)}$, χ, $\psi^{(0)}$, ψ, g_Q, γ_Q dieselbe Bedeutung haben, wie eingangs des §. 2. Die Curvenschaar ψ geht daher durch jeden Doppelpunkt einfach durch, und die Schaar χ enthält die Doppelpunkte gar nicht.

Damit g_Q auf γ_Q reducirt werde, ist in diesem Falle in jedem Doppelpunkte von f eine Bedingungsgleichung für die Parameter von ψ zu erfüllen.

Diese ergibt sich aus der Identität $4a$ des §. 2

$$\psi \equiv A'(s, z)\,\psi^{(0)} + B'f,$$

wenn $s = 0$, $z = 0$ einer der Doppelpunkte von f ist.

Es muss nämlich bestehen:

$$\psi_1 \equiv A'_0\,\psi_1^{(0)}, \qquad 1)$$

woraus folgt:

$$\psi_{10}\,\psi_{11}^{(0)} - \psi_{11}\psi_{10}^{(0)} = 0 \qquad 2)$$

oder nach der Bedeutung von ψ_1:

$$\psi_{11}^{(0)}(\lambda_0\,\psi_{10}^{(0)} + \ldots \lambda_r\psi_{10}^{(r)}) - \psi_{10}^{(0)}(\lambda_0\,\psi_{11}^{(0)} + \ldots + \lambda_r\psi_{11}^{(r)}) = 0. \qquad 3)$$

Die Gleichung 1) gestattet die Nichtadjunctionsbedingung auch geometrisch auszusprechen:

Der Theil der Schaar ψ, welcher auf f dieselbe Theilschaar ausschneidet, wie die Curven der Schaar χ, wird von den sämmtlichen Curven gebildet, die in jedem Doppelpunkte die Ausgangscurve $\psi^{(0)}$ berühren.

Es sei C_4 eine allgemeine Curve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkte a. Nimmt man auf C_4 eine Gruppe G_4 von Punkten 1, 2, 3, 4 an und legt durch dieselbe einen Kegelschnitt $\chi^{(0)}$, so schneidet das Kegelschnittsbüschel χ durch den Restschnitt von $\chi^{(0)}$ auf der C_4 eine γ_4^1 aus. Ist weiter $\psi^{(0)}$ ein adjungirter Kegelschnitt durch 1, 2, 3, 4, der die C_4 in zwei weiteren Punkten m, n trifft, so wird die γ_4^1 auch durch die ∞^1 Kegelschnitte ψ ausgeschnitten, welche durch m, n gehen und in d den Kegelschnitt $\psi^{(0)}$ berühren.

Die allgemeine Curve 4. Ordnung C_4 mit zwei Doppelpunkten in a_1 und a_2 kann nach dem Vorstehenden erzeugt werden durch ein Kegelschnittsbüschel ψ, dessen Curven sich in a_1 und a_2 berühren und ein projectivisches Kegelschnittsbüschel χ, dessen vier Basispunkte zusammen mit den weiteren vier Schnittpunkten irgend einer der Kegelschnitte von ψ den vollen Schnitt der C_4 mit einem Kegelschnitte $\chi^{(0)}$ bilden.

Es sei endlich C_5 eine Curve 5. Ordnung mit Doppelpunkten in $a_1, a_2, \ldots a_5$. Es sollen die adjungirten Curven 5. Ordnung ψ bestimmt werden, welche auf C_5 denselben beweglichen Schnitt haben, wie die Gesammtheit der Curven 3. Ordnung der Ebene. Aus dem Obigen ergibt sich folgende Bestimmung: Man lege durch $a_1, a_2, \ldots a_5$ einen Kegelschnitt K. Die gesuchte Schaar besteht dann aus den sämmtlichen adjungirten Curven 5. Ordnung, welche K in den Punkten $a_1 \ldots a_5$ berühren. Die Richtigkeit ist hier auch unmittelbar ersichtlich. Denn ist ψ_1 eine dieser Curven, so geht durch ihren Schnitt mit C_5 noch das Büschel $\psi_1 + z C_5 = 0$ von Curven derselben Art. Eine derselben enthält noch einen weiteren Punkt von K und zerfällt daher in den Kegelschnitt und eine Curve 3. Ordnung.

II. Die Grundcurve besitze auch dreifache Punkte.

Ist $s = 0$, $z = 0$ der dreifache Punkt von $f(s, z) = 0$, so haben die Curven ψ in $s = 0$, $z = 0$ einen Doppelpunkt, während die Curven χ diesen Punkt nicht enthalten.

Es bestehen an dieser Stelle drei Nichtadjunctionsbedingungen, welche sich aus der Bedingungsintensität

$$\psi \equiv A''(s,z)\,\psi^{(0)} + B''(s,z)\,f$$

ergeben. Es liefert:

$$\psi_{20}z^2 + \psi_{21}zs + \psi_{22}s^2 \equiv A_0''(\psi_{20}^{(0)}z^2 + \psi_{21}^{(0)}zs + \psi_{22}^{(0)}s^2)$$

die beiden Gleichungen:

$$\psi_{20} : \psi_{21} : \psi_{22} \equiv \psi_{20}^{(0)} : \psi_{21}^{(0)} : \psi_{22}^{(0)},$$

welche geometrisch aussagen, dass die sämmtlichen Curven der Schaar ψ im dreifachen Punkte von f dieselben Doppelpunktstangenten haben müssen, wie die Ausgangscurve $\psi^{(0)}$.

Die letzte Bedingungsgleichung folgt aus:

$$\psi_3 = A_0''\psi_3^{(0)} + A_1''\psi_2^{(0)} + B_0''f_3$$

und ist:

$$\begin{vmatrix} \psi_{30} & \psi_{20}^{(0)} & 0 & f_{30} \\ \psi_{31} & \psi_{21}^{(0)} & \psi_{20}^{(0)} & f_{31} \\ \psi_{32} & \psi_{22}^{(0)} & \psi_{21}^{(0)} & f_{32} \\ \psi_{33} & 0 & \psi_{22}^{(0)} & f_{33} \end{vmatrix} - A_0'' \begin{vmatrix} \psi_{30}^{(0)} & \psi_{20}^{(0)} & 0 & f_{30} \\ \psi_{31}^{(0)} & \psi_{21}^{(0)} & \psi_{20}^{(0)} & f_{31} \\ \psi_{32}^{(0)} & \psi_{22}^{(0)} & \psi_{21}^{(0)} & f_{32} \\ \psi_{33}^{(0)} & 0 & \psi_{22}^{(0)} & f_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

wo $A_0'' = \frac{\psi_{20}}{\psi_{20}^{(0)}} = \frac{\psi_{21}}{\psi_{21}^{(0)}} = \frac{\psi_{22}}{\psi_{22}^{(0)}}$ zu setzen ist.[1]

III. $k_i = 3,\ \sigma_i = 1.$

Aus der Identität:

$$\psi\chi^{(0)} \equiv A\psi^{(0)} + Bf$$

ergibt sich im dreifachen Punkte $s = 0,\ z = 0$ von f die Bedingung:

$$\psi_2 \cdot \chi_1^{(0)} = A_1'\psi_2^{(0)} + B_0'f_3$$

---

[1] Diese drei Gleichungen sind nothwendig und hinreichend, um die Function $\frac{\psi}{\psi^{(0)}}$ an jeder Stelle des algebraischen Gebildes $f(s,z) = 0$ mit der speciellen Function $\frac{\chi}{\chi^{(0)}}$ übereinstimmend zu machen.

welche die einzige Bedingungsgleichung:

$$\chi_{10}^{(0)}\begin{vmatrix} \psi_{20} & \psi_{20}^{(0)} & 0 & f_{30} \\ \psi_{21} & \psi_{21}^{(0)} & \psi_{20}^{(0)} & f_{31} \\ \psi_{22} & \psi_{22}^{(0)} & \psi_{21}^{(0)} & f_{32} \\ 0 & 0 & \psi_{22}^{(0)} & f_{33} \end{vmatrix} + \chi_{11}^{(0)}\begin{vmatrix} 0 & \psi_{20}^{(0)} & 0 & f_{20} \\ \psi_{20} & \psi_{21}^{(0)} & \psi_{20}^{(0)} & f_{31} \\ \psi_{21} & \psi_{22}^{(0)} & \psi_{21}^{(0)} & f_{32} \\ \psi_{22} & 0 & \psi_{22}^{(0)} & f_{33} \end{vmatrix} = 0$$

liefert. In dieselbe treten nur die Glieder erster Dimension von $\chi^{(0)}$ ein, da diese nach dem Restsatze für σ-Curven zur Charakterisirung der σ-Schaar γ_Q in diesem Falle hinreichen.

§. 4.

Betrachtung der Bedingungen für das nichtadjungirte Verhalten in Bezug auf ihre Unabhängigkeit.

Es mögen hier alle Bezeichnungen des §. 2 beibehalten werden.

Die Mannigfaltigkeit der Vollschaar g'_Q ist nach dem Riemann-Roch'schen Satze

$$q = Q - p + \tau,$$

worin τ die Anzahl der linear unabhängigen adjungirten φ_{n-3} bedeutet, welche durch die Gruppe G_Q gehen.

Die Mannigfaltigkeit q' der Schaar γ'_Q folgt aus der von Nöther gegebenen Erweiterung des Riemann-Roch'schen Satzes (vergl. Math. Annalen, Bd. 15, S. 522)

$$q' = Q - \pi + \tau_1,$$

worin

$$\pi = p + \frac{1}{2}\sum_i (k_i - \sigma_i)(k_i - \sigma_i - 1)$$

und τ_1 die Anzahl der linear unabhängigen σ-Curven φ' von der $n-3$. Ordnung bedeutet, welche durch die Gruppe G_Q gehen und in den vielfachen Punkten von f mit der σ-Curve $\chi^{(0)}$ gleichsingulär[1] sind.

---

[1] Über die Bedeutung „gleichsingulär", vergl. Nöther, l. c., Restsatz für σ-Curven.

Es sei zunächst die Vollschaar g_Q^q keine Specialschaar ($\tau = 0$).

Die Nichtadjunctionsbedingungen des §. 2 sind in der Zahl:

$$\frac{1}{2}\sum_i (k_i - \sigma_i)\, k_i - \sigma_i - 1) = \pi - p$$

vorhanden und reduciren die Vollschaar auf die Theilschaar $\gamma_Q^{q'}$.

Sind daher ρ dieser Gleichungen als Folge aller übrigen vorausgesetzt, so ergibt sich als Mannigfaltigkeit von $\gamma_Q^{q'}$

$$q' = Q - \pi + \rho.$$

Hat aber q' diesen Werth, so ist nach dem erweiterten Riemann-Roch'schen Satze nothwendig und hinreichend, dass durch die Gruppe G_Q gerade ρ linear von einander unabhängige σ-Curven φ'_{n-3} gehen. Hieraus ergibt sich:

Ist die Vollschaar g_Q^q keine Specialschaar, so können die $\frac{1}{2}\sum_i (k_i - \sigma_i)(k_i - \sigma_i - 1)$ Bedingungsgleichungen für das nichtadjungirte Verhalten nur dann von einander abhängig werden, wenn die σ-Schaar auch durch σ-Curven $n-3$. Ordnung ausgeschnitten werden kann, welche in den vielfachen Punkten von f_n mit $\chi^{(0)}$ gleichsingulär sind. Gehen durch eine Gruppe der σ-Schaar ρ von einander linear unabhängige Curven dieser Art, so sind genau ρ jener Gleichungen eine Folge der übrigen.

Ist g_Q^q selbst eine Specialschaar mit

$$q = Q - p + \tau$$

und besteht

$$q' = Q - \pi + \rho,$$

so sind zur Reduction der Vollschaar auf die Theilschaar genau:

$$(\pi - p) - (\rho - \tau)$$

von einander unabhängige Gleichungen nothwendig, und man hat daher:

Sind g_Q^q und $g_Q^{q'}$ beide Specialschaaren und gehen durch die Gruppe G_Q, τ-Curven φ_{n-3} und ρ-Curven φ'_{n-3},

so sind $(\rho-\tau)$ der Gleichungen für das nichtadjungirte Verhalten Folge aller übrigen.

Als Anwendung des Vorstehenden möge nur Folgendes angeführt werden.

Durch drei Doppelpunkte d_1, d_2, d_3 und zwei weitere Punkte a_1, a_2 einer rationalen Curve 4. Ordnung C_4^0 legt man alle Curven C_3. Sie schneiden auf der C_4^0 eine g_4^4 aus, welche als Theil die γ_4^2 enthält, die von den Geraden der Ebene ausgeschnitten wird.

Legt man durch d_1, d_2, d_3, a_1, a_2 den Kegelschnitt K, so hat man, um die g_4^4 auf die γ_4^2 zu reduciren, die Curven 3. Ordnung in d_1, d_2 den Kegelschnitt K berühren zu lassen. Dann ist die Bedingung in d_3 ebenfalls erfüllt, denn jede Curve zerfällt in K und eine Gerade.

Es sei eine Curve 6. Ordnung C_6^1 mit neun Doppelpunkten $d_1 \dots d_9$ gegeben. Man soll durch die Doppelpunkte die Curven 6. Ordnung legen, welche die C_6^1 so schneiden, wie die Curven 3. Ordnung der Ebene.

Legt man durch $d_1 \dots d_9$ eine Curve 3. Ordnung $\mathfrak{C}$, so muss jede Curve C_6 von der 6. Ordnung, welche $\mathfrak{C}$ in acht der Punkte d berührt, dieselbe auch im neunten berühren. Diese ∞^{10} Curven 6. Ordnung sind die gesuchten. (Letzteres ist auch daraus ersichtlich, dass man statt C auch $C+\lambda C_6^1$ wählen und die eine Willkürlichkeit benützen kann, um C noch durch einen weiteren Punkt von $\mathfrak{C}$ gehen zu lassen.)

Hieraus ergibt sich auch eine Bemerkung über die Curven 6. Ordnung mit neun Doppelpunkten überhaupt.

Wegen des obigen Verhaltens der gefundenen Curven 6. Ordnung gegen die durch die neun Doppelpunkte gelegte Curve 3. Ordnung $\mathfrak{C}$ folgt, dass die neun Doppelpunkte nicht willkürlich gewählt werden können, obwohl sie doch nur 27 Bedingungen darstellen.

Sind acht von den Doppelpunkten $d_1 \dots d_8$ gegeben, so ist d_9 an einen geometrischen Ort gebunden, der sich mit Hilfe des Vorstehenden folgendermassen definiren lässt:

Legt man durch $d_1 \dots d_8$ eine C_3, so schneiden alle Curven C von der 6. Ordnung, welche die C_3 in $d_1 \dots d_8$ berühren, auf derselben eine g_2^1 aus, die auch durch ein Geradenbüschel mit dem Scheitel s auf der C_3 ausgeschnitten werden kann.

Vewendet man so alle Curven C_3 des Büschels durch $d_1 \dots d_8$ und bestimmt auf jeder die vier Punkte $m_1 \dots m_4$, deren Tangentialpunkt s ist, so ist der Ort der Punkte „m" die Curve, auf welcher d_9 zu wählen ist:

Es sei endlich C_5^2 eine Curve 5. Ordnung mit dreifachem Punkte in a und Doppelpunkte in d. Eine adjungirte $\mathfrak{C}_3$ schneidet noch in sieben Punkten $\alpha_1 \dots \alpha_7$. Sie bildet mit einem beliebigen Kegelschnitte eine adjungirte C_5 und bestimmt die Vollschaar g_{10}^8. Um diese auf die durch alle Kegelschnitte der Ebene ausgeschnittene Schaar g_{10}^5 zu reduciren, sind vier Bedingungen nothwendig, von denen nach Vorstehendem eine eine Folge der übrigen sein muss. Und wirklich liegen die weiteren Schnittpunkte einer jeden adjungirten C_5, welche durch $\alpha_1 \dots \alpha_7$ geht, in d die $\mathfrak{C}$ berührt und in a dieselben Doppelpunktstangenten wie $\mathfrak{C}$ hat, auf einem Kegelschnitte. (Denn es geht durch dieses Schnittpunktsystem noch ein Büschel von C_5, von denen eine in $\mathfrak{C}$ und einen Kegelschnitt zerfällt.)

Es ist demnach die letzte Bedingung im dreifachen Punkte durch die übrigen drei von selbst erfüllt.

§. 5.

Theorie der nichtadjungirten Berührungscurven einer algebraischen Curve.

Für alle folgenden Entwicklungen ist der Begriff eines Systems von Berührungscurven die Grundlage. Derselbe ist bekanntlich von Hesse bei der allgemeinen Curve 4. Ordnung eingeführt und von Clebsch, insbesondere aber von Nöther (Invariante Darstellung algebraischer Functionen, Math. Annalen, Bd. 18, S. 275 ff.) ganz allgemein formulirt worden. Es ist darum nothwendig, den Systembegriff an dieser Stelle in aller Kürze und in der für das Folgende am besten geeigneten speciellen Fassung zu entwickeln.

$f(s, z) = 0$ sei die Grundcurve, welche in $d_2, d_3, \dots$ einen $k_2, k_3, \dots$-fachen Punkt haben möge. Ferner sei $A^{(0)}$ eine adjungirte

[1] Dieser Ort ist von Herrn Küpper mit Hilfe einer involutorischen Verwandschaft in der Ebene definirt worden. Vergl. Küpper: Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, VII. Folge, 1. Band.

Berührungscurve von f, welche die Grundcurve in den Q Punkten $a_1 \dots a_Q$ berührt und sonst nur noch in einer Gruppe G_R von R Punkten schneidet. Mit

$$P \equiv \lambda P^{(0)} + \lambda_1 P^{(1)} + \dots + \lambda_q P^{(q)}$$

bezeichnen wir eine Schaar adjungirter Curven gleicher Ordnung wie $A^{(0)}$ durch die Punkte $a_1 \dots a_Q$ und G_R. Die Curven P schneiden auf f eine lineare Schaar g_Q^q aus, für welche $q = Q - p$ ist, den einzigen Fall ausgenommen, dass in der Berührungsgruppe $A^{(0)}$ auch adjungirte Curven $n-3$. Ordnung berühren können.

Bei diesen Annahmen besteht folgende Identität:

$$P^2 \equiv A(s, z) A^{(0)} + B(s, z) f, \qquad 1)$$

denn P^2 enthält den freien Schnitt von $A^{(0)}$ mit f; in einem k_i-fachen Punkte von f verschwindet $A^{(0)}$ in der Ordnung $k_i - 1$ und P^2 in der Ordnung $2k_i - 2$. Daher sind sämmtliche, für die Identität 1) nothwendige und hinreichende Bedingungen des Nöther'schen Theorems identisch erfüllt. So erhält man durch 1) bei Annahme von $A^{(0)}$ eine zugehörige vollkommen definirte Schaar $A(s, z) = 0$ von Curven gleicher Ordnung wie $A^{(0)}$.

Diese Schaar ist, wie sich aus 1) sofort ergibt, adjungirt; sie ist quadratisch in den Parametern λ, denn dieselben müssen in A ebenso auftreten wie in P^2. Ferner wird vermöge 1) die Curve $f = 0$ von $AA^{(0)}$ genau so geschnitten wie von P^2. Daraus aber folgt, dass die Curven der Schaar A die feste Gruppe G_R enthalten und dass die Grundcurve f in jeder Gruppe der Schaar g_Q^q von einer Curve A berührt wird.

Man nennt die Gesammtheit der Curven A das zu $A^{(0)}$ gehörige System adjungirter Berührungscurven.

Da die Curve $A^{(0)}$ offenbar auch als Curve P aufzufassen ist, folgt, dass die Berührungsgruppen des zu $A^{(0)}$ gehörigen Systems zu den Punkten $a_1 \dots a_Q$ nicht nur, wie aus der Entstehung folgt, residual, sondern auch coresidual sind. Dieses doppelte Verhalten der Berührungsgruppen ist nothwendig und hinreichend, um den Systemsbegriff in sich geschlossen zu machen, denn aus diesem Grunde erhält man offenbar genau dasselbe System, wenn man statt von $A^{(0)}$ von irgend einer Curve desselben ausgeht.

Es folgt weiter, dass sich die durch eine Gruppe G_R auf f möglichen Berührungscurven stets zu adjungirten Systemen anordnen müssen.

Zwei verschiedene Systeme können niemals eine Curve gemein haben, da sie sonst wegen der Willkürlichkeit der Ausgangscurve identisch sein müssten.

Über die Bestimmung der einzelnen Systeme durch die feste Gruppe G_R und ihr gegenseitiges Verhalten hat sich auf diesem Wege nichts ergeben. Dazu gelangt man sehr leicht durch die Zweitheilung der Abel'schen Functionen mit Hilfe des Jacobi'schen Umkehrproblems.

(Vergl. Clebsch, Anwendung der Abel'schen Functionen auf Geometrie, Crelle's Journal, Bd. 63, oder Clebsch-Lindemann, Vorlesungen, S. 838.)

Es seien

$$u_h = \int \psi_h(s, z)\, dz \qquad \ldots h = 1, \ldots p$$

die p überall endlichen, zu $f(s, z) = 0$ gehörenden Integrale und

$$a_{h,j};\ b_{h,j} \qquad \begin{matrix} h = 1 \ldots p \\ j = 1 \ldots p \end{matrix}$$

die $p.2p$ Perioden derselben.

Ist dann $A^{(0)}$ die als bekannt vorausgesetzte adjungirte Berührungs-Curve, welche durch die festen Punkte G_R geht, so ergeben sich für die Berührungspunkte $x_1 \ldots x_Q = z_i,\ s(x_i)$ aller übrigen Curven dieser Art vermöge des Abel'schen Theorems die p transcendenten Gleichungen:

$$\sum_1^Q \int_{a_i}^{x_i} \psi_h(s, z)\, dz = \frac{1}{2}\, \Pi$$

worin

$$\Pi = \sum_1^p m_j a_{h,j} + \sum_1^p n_j b_{h,j}$$

zu setzen ist, weil die Integrationswege vollständig unbestimmt zu bleiben haben.

So entstehen, entsprechend den 2^{2p} Möglichkeiten der Zweitheilung der Perioden 2^{2p} von einander wesentlich verschiedene

Umkehrprobleme, deren jedes bei noch willkürlich angenommenen $Q-p$ Punkten x_i die übrigen p Punkte eindeutig liefert.

Es folgt demnach:

Durch eine Gruppe G_R von festen Punkten auf $f(s,z)=0$ gibt es 2^{2p} von einander völlig getrennte Mannigfaltigkeiten der Dimension $Q-p$ von adjungirten Curven, welche die Grundcurve sonst nur noch in Q Punkten berühren.

Es seien A und A' zwei Berührungscurven, die zu derselben Periodenhälfte $\frac{\Pi}{2}$ gehören und deren Berührungspunkte beziehungsweise $x_1 \dots x_Q$ und $x'_1 \dots x'_Q$ sein mögen.

Addirt man die zugehörigen $2p$ transcendenten Gleichungen, so folgt:

$$\sum_1^Q \int_{a_i}^{x_i} \psi_h(s,z)\,dz + \sum_1^Q \int_{a_i}^{x'_i} \psi_h(s,z)\,dz \equiv 0 \bmod \Pi \quad h=1\dots p$$

dies sagt aber nach der Umkehrung des Abel'schen Theorems aus, dass die Punkte x_i und x'_i, sowie die Gruppe G_R (mit 0 als Beitrag zur Integralsumme) auf einer adjungirten Curve derselben Ordnung wie $A^{(0)}$ liegen müssen.

Damit ist die Identität der hier transcendent definirten Systeme von Berührungsgruppen mit den vorhin algebraisch aufgestellten nachgewiesen.

Für adjungirte Curven kann demnach Folgendes als bekannt vorausgesetzt werden:

Durch irgend welche feste Punkte auf der Curve $f(s,z)=0$ gehen 2^{2p} von einander verschiedene Systeme von adjungirten Berührungscurven, welche die f sonst nur noch in Q Punkten berühren. In jedem dieser Systeme gibt es im Allgemeinen ∞^{Q-p} Curven.

Ähnliche Resultate für nicht adjungirte Berührungscurven zu entwickeln, ist die Hauptaufgabe einer jeden Theorie dieser Curven.

Das Abel'sche Theorem liefert in diesem Falle den Ansatz des allgemeinen erweiterten Umkehrproblems, dessen Lösung aber noch aussteht.

Im Folgenden wird diese Theorie in einer Weise behandelt, für welche sich der überall massgebende Gesichtspunkt so charakterisiren lässt:

Den zu untersuchenden nichtadjungirten Mannigfaltigkeiten von Berührungscurven werden in bestimmter Weise adjungirte Berührungscurvensysteme zugeordnet. Unter Voraussetzung der für die letzteren aus dem Jacobi'schen Umkehrproblem fliessenden Resultate wird versucht, mit Hilfe der im ersten Theile der Arbeit gewonnenen Mittel, auf algebraischem Wege, die Theorie der nichtadjungirten Berührungscurven zu entwickeln.

Es sei $\mathfrak{A}^{(0)}$ eine σ-Berührungscurve (vergl. §. 2), welche die Grundcurve $f(s,z)=0$ in Q Punkten $a_1 \dots a_Q$ berührt und sonst nur noch in einer Gruppe Γ_R schneidet. $A^{(0)}$ bedeute eine adjungirte Curve, welche mit $A^{(0)}$ dieselbe Berührungsgruppe hat und sonst f nur noch in einer Gruppe G_R trifft.

Die Gesammtheit der adjungirten Curven gleicher Ordnung mit $A^{(0)}$ durch G_R schneidet auf $f=0$ die Corresidualschaar G_{2Q}^{2Q-p} aus. Lässt man die ausschneidenden Curven dieser Schaar in den vielfachen Punkten von f die $\frac{1}{2}\Sigma(k_i-\sigma_i)(k_i-\sigma_i-1)$ Nichtadjunctionsbedingungen des §. 2 erfüllen, so ist die reducirte lineare Schaar nach §. 2 identisch mit dem Schnitte aller σ-Curven gleicher Ordnung mit $\mathfrak{A}^{(0)}$ durch die Gruppe Γ_R.

Um daher die Gesammtheit der Gruppen zu erhalten, in welchen σ-Curven durch Γ_R berühren können und auch wirklich berühren, ist nur nothwendig, aus den sämmtlichen adjungirten Berührungscurven durch G_R jene Mannigfaltigkeiten auszusondern, welche in den vielfachen Punkten von f die Bedingungen für das nichtadjungirte Verhalten erfüllen.

Nach Früherem zerfällt die Gesammtheit der adjungirten Berührungscurven durch G_R in 2^{2p} Systeme, von denen jedes durch eine seiner Curven algebraisch definirt ist.

Es ist darum zur vollständigen Lösung nur nothwendig, die Curven dieser Systeme in den vielfachen Punkten von f den Nichtadjunctionsbedingungen genügen zu lassen.

Es habe

$$P \equiv \lambda_0 P^{(0)} + \lambda_1 P^{1} + \ldots + \lambda_q P^{(q)}$$

in Bezug auf $A^{(0)}$ dieselbe Bedeutung wie auf S. 19.

Dann ergibt sich aus der dort bewiesenen Identität:

$$P^2 \equiv A . A^{(0)} + Bf \qquad 1)$$

das zu $A^{(0)}$ gehörige adjungirte Berührungscurvensystem A.

Soll sich dasselbe nichtadjungirt verhalten, so muss nach §. 2 die Identität bestehen

$$\mathfrak{A}^{(0)} A \equiv \mathfrak{A} A^{(0)} + Mf, \qquad 2)$$

wo $\mathfrak{A}$ und M ganze Functionen von s, z sind.

Diese Identität besteht aber nicht von selbst; denn $A\mathfrak{A}^{(0)}$ erfüllt zwar die dazu nothwendigen Bedingungen des Nöther'schen Theorems in allen freien Schnittpunkten von $A^{(0)}$ und f, verschwindet aber in einem k_i-fachen Punkte von f nur $k_i + \sigma_i - 1$-fach ($\sigma_i < k_i - 1$), während es bekanntlich in der Ordnung $2k_i - 2$ verschwinden müsste, um die Identität ohne Bedingungen für A herbeizuführen.

Nach §. 2 lassen sich diese Bedingungsgleichungen für A aufstellen und sind in der Anzahl $\frac{1}{2}(k_i - \sigma_i)(k_i - \sigma_i - 1)$ vorhanden. Sie sind in den Constanten von A linear und daher in den Parametern „λ" quadratisch.

In dem zu $A^{(0)}$ gehörigen adjungirten System ist aber die Curvenschaar:

$$\lambda_0 P^{(0)} + \lambda_1 P^{(1)} + \ldots + \lambda_q P^{q}$$

das einzige untermittelbar gegebene.

Es lässt sich darum erwarten, dass die Bedingungsgleichungen für die Parameter λ eine einfachere und für die Discussion geeignetere Gestalt annehmen, wenn man die Nichtadjunctionsbedingungen für die Schaar A in Bedingungen für die Schaar P umsetzt.

Dies ist offenbar möglich, da die Curven A und P einander im System eindeutig zugeordnet sind.

Man verwendet hiezu am einfachsten den Nöther'schen Fundamentalsatz.

Erfüllt A die Identität 2), so besteht auch:

$$\mathfrak{A}^{(0)} A . A^{(0)} \equiv \mathfrak{A} A^{(0)2} + Nf$$

oder wegen 1)

$$(P^2 - Bf)\mathfrak{A}^{(0)} \equiv \mathfrak{A}(s, z) A^{(0)2} + N(s, z) f,$$

hieraus folgt eine Identität von der Form:

$$\mathfrak{A}^{(0)} P^2 \equiv \mathfrak{A} A^{(0)2} + \mathfrak{B} f. \qquad 3)$$

Ist umgekehrt für P^2 die Identität von der Form 3) erfüllt, so besteht auch die Identität 2); es ist darum nur nöthig, jene Bedingungsgleichungen für die Parameter von P zu betrachten, welche nothwendig und hinreichend sind, damit für P^2 die Identität 3) bestehe. Die letztere eignet sich auch, um für das Folgende den Ausgangspunkt zu bilden.

Es sei $s = 0$, $z = 0$ ein k-facher Punkt von $f(s, z) = 0$ und ein σ-facher Punkt von $\mathfrak{A}^{(0)}$.

Dann muss, wenn 3) bestehen soll, in der Umgebung dieser Stelle die Identität stattfinden:

$$\mathfrak{A}^{(0)} P^2 \equiv \mathfrak{A}'(s, z) A^{(0)2} + \mathfrak{B}'(s, z) f. \qquad 3')$$

Wenn wir die im §. 2 eingeführten Bezeichnungen einhalten, so sind für $\mathfrak{A}'(s, z)$ und $\mathfrak{B}'(s, z)$ nur die Entwicklungen zulässig:

$$\mathfrak{A}'(s, z) \equiv \mathfrak{A}'_\sigma + \mathfrak{A}'_{\sigma+1} + \dots$$
$$\mathfrak{B}'(s, z) \equiv \mathfrak{B}'_{k+\sigma} + \mathfrak{B}'_{k+\sigma+1} + \dots$$

und es muss bis zu den Gliedern beliebiger Dimension die Identität bestehen:

$$(\mathfrak{A}^{(0)}_\sigma + \mathfrak{A}^{(0)}_{\sigma+1} + \dots)(P_{k-1} + P_k + \dots)^2 \equiv$$
$$\equiv (\mathfrak{A}'_\sigma + \mathfrak{A}'_{\sigma+1} + \dots)(A^{(0)}_{k-1} + A^{(0)}_k + \dots)^2 +$$
$$+ (\mathfrak{B}'_{k+\sigma-2} + \mathfrak{B}'_{k+\sigma-1} + \dots)(f_k + f_{k+1} + \dots) \qquad 3'')$$

Hieraus ergibt sich eine Reihe von Identitäten, die sämmtlich Bedingungsgleichungen für die Parameter liefern

$$\mathfrak{A}^{(0)}_\sigma P^2_{k-1} \equiv \mathfrak{A}'_\sigma A^{(0)2}_{k-1} + \mathfrak{B}'_{k+\sigma-2} f_k \qquad 4')$$

$$2\mathfrak{A}_\sigma^{(0)} P_{k-1}P_k + \mathfrak{A}_{\sigma+1}^{(0)} P_{k-1}^2 \equiv 2\mathfrak{A}'_\sigma A_{k-1}^{(0)} A_k^{(0)} + \mathfrak{A}'_{\sigma+1} A_{k-1}^{(0)2} + \mathfrak{B}'_{k+\sigma-2} f_{k+1} + \mathfrak{B}'_{k+\sigma-1} f_k, \quad 4'')$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Die letzte Identität, welche an dieser Stelle noch eine Bedingung gibt, ist nach dem Nöther'schen Theorem:

$$\mathfrak{A}_\sigma^{(0)} \mathrm{P} + \ldots + \mathfrak{A}_k^{(0)} P_{k-1}^2 \equiv \mathfrak{A}'_\sigma \mathrm{A} + \ldots + \mathfrak{A}'_{k-2} A_{k-1}^{(0)2} + \mathfrak{B}'_{k+\sigma-2} f_{2k-\sigma-2} + \ldots \mathfrak{B}'_{2k-4} f_k, \quad 4^{(k-\sigma-2)})$$

worin P und A die in P^2 und $A^{(0,2}$ vorhandenen Glieder $(2k-2)+$ $+(k-\sigma-2) = 3k-\sigma-4$. Dimension zusammenfassen.

Die Identität 4') gibt $2k+\sigma-1$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der $k+2\sigma$ Constanten:

$$\mathfrak{A}'_{\sigma,0} \ldots \mathfrak{A}'_{\sigma,\sigma} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}'_{k+\sigma-2,0} \ldots \mathfrak{B}'_{k+\sigma-2,\,k+\sigma-2}$$

und macht daher $k-\sigma-1$ lineare Bedingungsgleichungen für die Quadrate und Producte der Grössen $P_{k-1,0} \ldots P_{k-1,k-1}$ nothwendig.

Da weiter in obiger Bezeichnung:

$$P_{k-1,i} = \lambda_0 P_{k-1,i}^{(0)} + \lambda_1 P_{k-1,i}^{(1)} + \ldots \lambda_q P_{k-1,i}^{(q)} \qquad i = 0 \ldots k-1$$

ist, so entstehen aus 4') im Ganzen $k-\sigma-1$ Bedingungsgleichungen von der Form

$$\sum_1^q \sum_1^q a_{i,j} \lambda_i \lambda_j = 0. \qquad 5)$$

Ebenso erhält man aus $4''$, $4'''$ ... $4^{(k-\sigma-2)}$ beziehungsweise $k-\sigma-2$, $k-\sigma-3$ ... 1, daher im Ganzen $\frac{1}{2}(k-\sigma)(k-\sigma-1)$ Gleichungen von der Form 5), wie es nach der allgemeinen Theorie §. 2 sein muss.

Aus diesen Betrachtungen folgt:

Um in dem zu $A^{(0)}$ gehörigen adjungirten System A die Gesammtheit der Gruppen zu erhalten, in welchen nichtadjungirte Curven $\mathfrak{A}$ durch Γ_R berühren können, hat man die Parameter λ der adjungirten Schaar P in den vielfachen Punkten der Grundcurve $\frac{1}{2}\Sigma(k_i-\sigma_i)$. $.(k_i-\sigma_i-1)$ Bedingungsgleichungen von der Form 5)

erfüllen zu lassen. Diese Gleichungen sind identisch mit den Bedingungen für das nichtadjungirte Verhalten der Curven der Schaar A.

Die Untersuchung dieses Systems von Bedingungsgleichungen hat bei der vorliegenden Behandlung der nichtadjungirten Berührungscurven in jedem gegebenen Falle die Hauptaufgabe zu bilden, und zwar hat dieselbe zu entscheiden:

1. Ob in Folge der speciellen Natur der Gleichungen 5) (etwa durch Zerfallen derselben in lineare) von einander getrennte Mannigfaltigkeiten von nicht adjungirten Berührungscurven innerhalb des adjungirten Systems auftreten.

2. Ob sich die erhaltenen σ-Berührungscurven von selbst oder durch Hinzufügung von Bedingungen in Systeme im nichtadjungirten Sinne anordnen lassen.

3. In welchen Fällen die Gleichungen 5) aufhören von einander unabhängig zu sein.

An dieser Stelle wird es nothwendig, darüber zu entscheiden, ob der bisherige Systemsbegriff auf σ-Curven ausgedehnt werden kann oder nicht.

Es sei $\mathfrak{A}^{(0)}$ die σ-Berührungscurve, und es möge die Schaar

$$\Pi \equiv \mu_0 \Pi^{(0)} + \mu_1 \Pi^{(1)} + \ldots \mu_\nu \Pi^{(\nu)}$$

in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(0)}$ dieselbe Bedeutung haben wie die Schaar P gegenüber $A^{(0)}$.

Soll die Curve $\mathfrak{A}^{(0)}$ ein System von Berührungscurven im früheren Sinne definiren, so müsste (vergl. S. 19) die Identität

$$\Pi^2 \equiv \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{(0)} + B_1 f$$

bestehen, ohne dass die Parameter μ der Schaar Π durch Bedingungen beschränkt wären. Dies ist aber nicht der Fall, da in einem k_i-fachen Punkte von f Π^2 nur $2\sigma_i$-fach verschwindet.

Ausgenommen ist der einzige Fall, dass für jeden k_i-fachen Punkt von f $\sigma_i = 0$ ist, denn dann fallen die Bedingungen in den vielfachen Punkten von selbst fort.

Unmittelbar ist daher durch die σ-Curve $\mathfrak{A}^{(0)}$ ein System von σ-Berührungscurven nicht definirt.

Es entsteht aber die Frage, ob man den σ-Berührungscurven in den vielfachen Punkten von f nicht ein specielles Verhalten

vorschreiben kann, so dass man dadurch doch zu einem $\mathfrak{A}^{(0)}$ zugehörigen System im nichtadjungirten Sinne gelangt? Dies ist in der That möglich, beispielsweise genügt es für den Fall $k=3$, $\sigma=1$ die Curven der Schaar II die Ausgangscurve $\mathfrak{A}^{(0)}$ im dreifachen Punkte von f berühren zu lassen.

Wenn die nichtadjungirten Berührungscurven die vielfachen Punkte der Grundcurve gar nicht enthalten (Fall $\sigma=0$), so lässt sich der vorstehende allgemeine Gang durch einen wesentlich einfacheren ersetzen, denn in diesem Falle gehen die Coëfficienten von $\mathfrak{A}^{(0)}$ nur scheinbar in die Bedingungsgleichungen 5) ein.

Ist wieder $s=0$, $z=0$ eine k-fache Stelle von $f(s,z)=0$, so hat man in der Umgebung derselben zunächst die Identität

$$\mathfrak{A}^{(0)}P^2 \equiv \mathfrak{A}'(s,z)A^{(0)2}+\mathfrak{B}'(s,z)f$$

zu erfüllen. Da aber jetzt $\mathfrak{A}^{(0)}(s,z)$ für $s=0$, $z=0$ nicht verschwinden soll, tritt die S. 10 gemachte Bemerkung zum Nöther'schen Theorem in Kraft, und es genügt, dass P^2 in der Umgebung dieser Stelle bis hin zu den Gliedern beliebiger Dimension die Identität erfülle:

$$P^2 \equiv \mathfrak{A}''(s,z)A^{(0)2}+\mathfrak{B}''(s,z)f \qquad 6)$$

wo $\mathfrak{A}''(s,z)$, $\mathfrak{B}''(s,z)$ unbegrenzte Entwicklungen mit unbestimmt gelassenen Constanten darstellen.

Die Identität 6) führt leichter zu den an dieser Stelle bestehenden $\frac{1}{2}k(k-1)$ Gleichungen für die Parameter von P. Sie macht ersichtlich, dass im Falle $\sigma=0$ die Constanten von $\mathfrak{A}^{(0)}$ aus diesen Gleichungen vollständig entfernt sind. Die so im adjungirten System erhaltenen Berührungsgruppen gehören daher zu nichtadjungirten Berührungscurven überhaupt, ganz unabhängig von den weiteren Punkten, welche die letzteren auf der Grundcurve gemeinsam haben.

§. 6.

I. Die Grundcurve $f(s,z)=0$ habe nur δ Doppelpunkte $d_1, d_2 \ldots d_\delta$.

Es sei $s=0$, $z=0$ ein Doppelpunkt von $f(s,z)=0$. $\mathfrak{A}^{(0)}$, $A^{(0)}$, P mögen dieselbe Bedeutung haben wie §. 5. Das zu $A^{(0)}$

gehörige adjungirte System von Berührungscurven ergibt sich aus der Identität 1), §. 5 als die quadratische Schaar $A(s, z) = 0$.

Sollen in den Berührungsgruppen von A Curven berühren können, welche den Doppelpunkt $s = 0, z = 0$ von f nicht enthalten, so haben die Parameter λ von P an dieser Stelle eine Bedingungsgleichung zu erfüllen.

Diese ergibt sich nach 6), §. 5 aus der Identität:

$$P^2 \equiv \mathfrak{A}'(s, z) A^{(0)2} + \mathfrak{B}'(s, z) f, \qquad 1)$$

wo $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ mit Constanten beginnen, und zwar aus:

$$(P_{10} z + P_{11} s)^2 \equiv \mathfrak{A}'_0 (A^{(0)}_{10} z + A^{(0)}_{11} s)^2 + \mathfrak{B}'_0 (f_{20} z^2 + f_{21} zs + f_{22} s^2). \qquad 2)$$

worin

$$P_{1,0} \equiv \sum_0^q \lambda_i P^{(i)}_{1,0}; \quad P_{11} \equiv \sum_0^q \lambda_i P^{(i)}_{1,1}.$$

Zum Bestehen von 2) ist durch P_{10}, P_{11} die Gleichung zu erfüllen:

$$D \equiv \begin{vmatrix} P_{10}^2 & A_{10}^{(0)2} & f_{20} \\ 2P_{10} P_{11} & 2A^{(0)}_{10} A_{11} & f_{21} \\ P_{11}^2 & A_{11}^{(0)2} & f_{22} \end{vmatrix} = 0. \qquad 3)$$

Diese homogene quadratische Gleichung für P_{10}, P_{11} hat das Wurzelsystem $P_{10} = \text{Const.}\ A^{(0)}_{10}$; $P_{11} = \text{Const.}\ A^{(0)}_{11}$ rational bekannt; daher muss die Discriminante Δ derselben ein volles Quadrat sein.

Man findet:

$$\Delta = (A^{(0)}_{10} f_{22} + A^{(0)}_{10} f_{20} - A^{(0)}_{10} A^{(0)}_{11} f_{21})^2.$$

Mit Hilfe von Δ ergibt sich, dass die Parameter λ in $s = 0$, $z = 0$ entweder die eine oder die andere der beiden Gleichungen:

$$A^{(0)}_{11} P_{10} - A^{(0)}_{10} P_{11} = 0 \qquad 4a)$$

$$(2A_{10} f_{22} - A_{11} f_{21}) P_{10} + (2A_{11} f_{20} - A_{10} f_{21}) P_{11} = 0 \qquad 4b)$$

zu erfüllen haben.

Beide Gleichungen 4) haben eine unmittelbare geometrische Bedeutung:

Die Curven der Schaar P, deren Parameter die Gleichung $4a$) erfüllen, haben im Doppelpunkte von f dieselbe Tangente wie A^0; die Curven, die der Gleichung $4b$) genügen, haben dort die zu dieser Tangente in Bezug auf die Doppelpunktstangenten harmonische Richtung. (Dies ergibt sich auch schon aus dem Anblicke der Identität 2), denn diese sagt aus, dass die Richtung $(P_{10}z+ +P_{11}s)$ ein Doppelelement der durch:

$$\mathfrak{A}'_0(A^{(0)}_{10}z+A^{(0)}_{11}s)^2+\mathfrak{B}'_0(f_{20}z^2+f_{21}zs+f_{22}s^2)=0$$

bestimmten quadratischen Involution werden muss, was offenbar nur geschehen kann, wenn sie mit der Richtung $A^{(0)}_{10}z+A^{(0)}_{11}s$ oder mit der zu dieser in Bezug auf die Doppelpunktstangenten harmonischen übereinstimmt.)

Werden alle δ Doppelpunkte berücksichtigt und die S. 21 abgeleiteten Sätze benützt, so ergibt sich:

Hat die Grundcurve f nur δ Doppelpunkte, so gibt es durch eine Gruppe Γ_R von festen Punkten auf derselben $2^\delta 2^{2p}$ von einander völlig getrennte Mannigfaltigkeiten von Curven, welche die Doppelpunkte nicht enthalten und die Grundcurve sonst nur noch in Q Punkten berühren. Die Dimension dieser Mannigfaltigkeiten ist im Allgemeinen $Q-p-\delta$ und sie ordnen sich in Gruppen von je 2^δ an, die stets in einem adjungirten Berührungscurvensysteme liegen.

(Vergl. auch Clebsch u. Gordan, Abel'sche Functionen, Anwendungen des erweiterten Umkehrproblems, und Humbert, l. c., S. 291.)

Diese Resultate erfahren eine wesentliche Ergänzung, indem sich zeigen lässt, dass die gefundenen Mannigfaltigkeiten von Berührungscurven volle Systeme im nicht-adjungirten Sinne bilden.

Es sei zu diesem Zwecke die Grundcurve f zunächst mit nur einem Doppelpunkte in d vorausgesetzt.

Die Curven der Schaar P, welche in d die Bedingung $4a$) oder $4b$) erfüllen, seien beziehungsweise mit P_a und P_b bezeichnet.

P_a und P_b schneiden auf f die einzigen im System A enthaltenen Mannigfaltigkeiten von nichtadjungirten Berührungsgruppen aus. Es sei noch die Schaar Π in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(0)}$ so definirt wie auf S. 26; sie schneidet dann auf f die Berührungsgruppen des zu $\mathfrak{A}^{(0)}$ im nichtadjungirten Sinne gehörigen Systems aus.

Die adjungirte Berührungscurve $A^{(0)}$ ist offenbar als eine Curve P_a und die $\mathfrak{A}^{(0)}$ als eine Curve Π aufzufassen. Da nun die sämmtlichen Curven P_a im Doppelpunkte d die $A^{(0)}$ berühren, muss nach §. 2 der bewegliche Schnitt von P_a auf f identisch sein mit dem Schnitte von Π. Dies sagt aber aus, dass die Mannigfaltigkeit M_a identisch ist mit dem Berührungscurvensystem, welches zu $\mathfrak{A}^{(0)}$ im nichtadjungirten Sinne gehört.

Es bleibt noch das Analoge ebenso direct von M_b nachzuweisen.

Dazu sei $P_b^{(0)}$ eine Curve von P_b und $A^{(0)\prime}$ die adjungirte Curve, welche in ihrer Schnittgruppe berührt. In dieser Gruppe berührt auch eine weitere nichtadjungirte Curve $\mathfrak{A}^{(0)\prime}$ durch Γ_R. $A^{(0)\prime}$ muss nach früherem im Punkte d die $A^{(0)}$ berühren.

Macht man nun die $A^{(0)\prime}$ zur Ausgangscurve des adjungirten Systems und haben P', P'_a, P'_b und Π' die analoge Bedeutung wie im früheren Falle, so schneiden offenbar die Schaaren P'_a und P'_b auf f wieder die Gesammtheit der nichtadjungirten Berührungsgruppen im gegebenen adjungirten System aus.

Darum muss der Schnitt von P'_a und P'_b auf f identisch sein mit dem Schnitte von P_a und P_b.

Die Identität der Schnitte kann aber nur so eintreten, dass einerseits P'_a und P_a und anderseits P'_b und P_b ihren beweglichen Schnitt auf f gemein haben.

Denn wäre jede Schnittgruppe von P'_a auf f identisch mit einer von P_a, so müsste auch die Berührungsgruppe von $A^{(0)\prime}$ durch eine Curve P_a ausgeschnitten werden (da ja $A^{(0)\prime}$ eine specielle P'_a ist), und dies widerspricht der über $A^{(0)\prime}$ gemachten Voraussetzung. Darum ist jene Annahme unzulässig und es schneidet P_b auf f dieselben Gruppen aus wie P'_a.

Man erkennt aber wie früher, dass der bewegliche Schnitt von P'_a auf f mit dem Schnitte von Π' übereinstimmt, und dies

zusammengefasst gibt das Resultat, dass die Mannigfaltigkeit M_b mit dem aus $\mathfrak{A}^{(0)\prime}$ im nichtadjungirten Sinne abgeleiteten Berührungscurvensystem identisch ist.

Es ist evident, dass sich diese Betrachtung unmittelbar auf eine Grundcurve mit beliebig vielen Doppelpunkten überträgt.

II. Die Grundcurve besitze Doppel- und Rückkehrpunkte.

Ein Rückkehrpunkt von $f(s,z)=0$ liege in $s=0$, $z=0$, und es bestehe an dieser Stelle für f die Entwicklung

$$f\equiv(f_{10}z+f_{11}s)^2+f_3+f_4+\cdots$$

Die Bedingungsidentität 2) dieses Paragraphen geht hier über in

$$(P_{10}z+P_{11}s)^2\equiv\mathfrak{A}_0'(A_{10}z+A_{11}s)^2+\mathfrak{B}_0'(f_{10}z+f_{11}s)^2 \qquad 2')$$

und die Bedingungsgleichungen $4a)$, $4b)$ sind in diesem Falle

$$A_{11}^{(0)}P_{10}-A_{11}^{(0)}P_{11}=0 \qquad 4'a)$$

$$f_{11}P_{10}-f_{10}P_{11}=0 \qquad 4'c)$$

Dies geht auch sofort aus der Identität $2')$ hervor, wenn man beachtet, dass $(P_{10}z+P_{11}s)$ ein Doppelelement der Involution:

$$\mathfrak{A}_0'(A_{10}^{(0)}z+A_{11}^{(0)}s)^2+\mathfrak{B}_0'(f_{10}z+f_{11}s)^2=0$$

werden muss.

Die Curven P, welche $4'a)$ genügen, berühren im Rückkehrpunkte die Curve $A^{(0)}$ und haben genau dasselbe Verhalten wie früher. Die Curven, welche $4'b)$ erfüllen, sind im Rückkehrpunkte nicht nur adjungirt, sondern berühren dessen Tangente, so dass einer von ihren Q freien Schnittpunkten in den Rückkehrpunkt rückt und daher fest wird.

So ergibt sich der Satz:

In Folge eines Rückkehrpunktes von f treten in jedem adjungirten System zwei von einander getrennte Mannigfaltigkeiten von nichtadjungirten Berührungscurven auf.[1] Diese Mannigfaltigkeiten bilden Systeme im nichtadjungirten Sinne, und die Curven eines dieser

[1] Herr Humbert findet in diesem Falle irrthümlich nur ein System, l. c., S. 293.

Systeme enthalten sämmtlich den Rückkehrpunkt als uneigentlichen Berührungspunkt.

Hat die Grundcurve δ Doppel- und r Rückkehrpunkte, so gibt es durch die Restgruppe Γ_R beziehungsweise:

$$2^\delta 2^{2p}; \quad \binom{r}{1} 2^\delta 2^{2p}; \quad \binom{r}{2} 2^\delta 2^{2p} \ \ldots\ 2^\delta 2^{2p}$$

von einander getrennte Systeme von nichtadjungirten Berührungscurven, welche beziehungsweise

$$0; \quad 1; \quad 2 \ \ldots\ r$$

Rückkehrpunkte enthalten.

Die hier entwickelte Theorie gestattet viele Anwendungen, zu deren Charakterisirung nur folgende specielle Fälle dienen mögen.

Es seien bei einer Curve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkte C_4^2 die überall berührenden Kegelschnitte anzugeben, welche nicht durch den Doppelpunkt gehen.

Ist $\mathfrak{A}^{(0)}$ ein solcher Kegelschnitt, so ist derselbe am einfachsten mit einer beliebig durch d gelegten Geraden G als adjungirte Berührungscurve 3. Ordnung aufzufassen. In ihrem System gibt es nach Vorstehendem zwei nichtadjungirte Systeme von überall berührenden Kegelschnitten.

Ausgenommen ist nur das adjungirte System, welches aus einer doppelt gezählten Geraden hergeleitet ist, denn dieses liefert keine eigentlichen Berührungskegelschnitte, sondern die doppelt gezählten Geraden der Ebene zweifach gerechnet.

Die C_4^2 hat demnach 30 Systeme von überall berührenden Kegelschnitten, die nicht durch den Doppelpunkt gehen.

Diese sind einander paarweise zugeordnet, und es lässt sich diese Zuordnung auch durch einen Satz des Herrn Humbert, l. c., S. 306, charakterisiren, der sich aus dem Vorstehenden einfach daraus ergibt, dass man als Gerade G jede Gerade des Büschels durch den Doppelpunkt wählen kann.

Die vorstehende Behandlung gestattet diesen Satz sogleich auf alle Curven gerader Ordnung C_{2n}^p mit nur einem Doppelpunkte d auszudehnen:

Die C_{2n}^{p} besitzt $2(2^{2p}-1)$ von einander verschiedene nichtadjungirte Systeme von überall berührenden Curven C_{2n-2}. Diese Systeme sind einander auf folgende Art paarweise zugeordnet: Greift man aus je einem System desselben Paares je eine überall berührende C_{2n-2} heraus, so bilden die beiden Berührungsgruppen $(2n-1)^2-1$ Basispunkte eines Büschels von Curven C_{2n-1}. Der letzte Basispunkt ist der Doppelpunkt d der Curve. Jede Curve des Büschels trifft die C_{2n}^{p} noch in $2n-2$ weiteren Punkten, welche mit dem Doppelpunkte auf einer Geraden liegen. Die Tangente der Curve im Doppelpunkte ist durch diese Gerade von den beiden Doppelpunktstangenten harmonisch getrennt.

Für die Curve 4. Ordnung C_4^1 mit zwei Doppelpunkten ergibt sich auf demselben Wege wie vorhin:

Jedes adjungirte System enthält vier Systeme überall berührender Kegelschnitte, die nicht durch die Doppelpunkte gehen. Ausgenommen ist nur das System, welches zu einer doppelt gezählten Geraden gehört; denn man sieht leicht, dass in diesem Falle zunächst die doppelt gezählten Geraden der Ebene dreifach zählend auftreten und sich daher nur ein einziges eigentliches System von Berührungskegelschnitten ergibt. Man erkennt auch, dass die Berührungsgruppen derselben durch alle Kegelschnitte ausgeschnitten werden, die durch die beiden Doppelpunkte gehen und in jedem derselben die zur Verbindungsgeraden beider in Bezug auf die Doppelpunktstangenten harmonische Richtung berühren.

Die C_4^1 hat daher 13 von einander verschiedene Systeme von überall berührenden Kegelschnitten, die nicht durch die Doppelpunkte gehen.

(Vergl. Humbert, l. c. S. 307.)

Es sei endlich C_5 eine Curve 5. Ordnung mit fünf Doppelpunkten $d_1, d_2 \ldots d_5$. Es sind die Curven 3. Ordnung zu bestimmen, welche durch drei feste Punkte α, β, γ der Curve gehen und dieselbe noch in sechs weiteren Punkten berühren.

Fasst man eine solche Curve mit dem durch die Doppelpunkte gelegten Kegelschnitte K als adjungirte Berührungscurve C_5 auf, so ergibt sich sofort Folgendes:

Es gibt 128 Curven 3. Ordnung der gesuchten Art, welche sich zu vier verschiedenen Gruppen anordnen. Für je zwei Curven derselben Gruppe gilt, dass ihre Berührungsgruppen zusammen mit den Punkten α, β, γ und den fünf Doppelpunkten den vollständigen Schnitt der C_5 mit einer Curve 5. Ordnung ausmachen. Die letztere berührt den Kegelschnitt K in j der Punkte d und schneidet ihn in den $5-j$ weiteren Punkten in Bezug auf die Doppelpunktstangenten harmonisch.

Als Beispiel für Curven mit Rückkehrpunkt diene die Curve 4. Ordnung mit einem oder zwei Rückkehrpunkten.

Man erhält auf demselben Wege wie früher und mit Benützung der in diesem Paragraphen unter II. erhaltenen Sätze:

Die Curve 4. Ordnung mit einem Rückkehrpunkte hat 30 von einander verschiedene ∞^1 Schaaren von überall berührenden Kegelschnitten, welche Systeme im nichtadjungirten Sinne bilden. 15 derselben berühren die Curve in vier Punkten, die 15 anderen gehen durch den Rückkehrpunkt und berühren an drei Stellen.

Ebenso findet man weiter:

Die Curve 4. Ordnung mit zwei Rückkehrpunkten besitzt 13 von einander verschiedene ∞^1 Schaaren von überall berührenden Kegelschnitten, welche Systeme bilden. Drei dieser Systeme berühren die Curve in vier Punkten; je drei weitere gehen durch einen Rückkehrpunkt und berühren in drei Punkten. Drei Systeme gehen durch beide Rückkehrpunkte und berühren noch in zwei Punkten, und endlich tritt ein letztes System von Berührungskegelschnitten durch die beiden Rückkehrpunkte, auf deren zwei weitere Berührungspunkte durch Kegelschnitte ausgeschnitten werden, die in den beiden Rückkehrpunkten die Rückkehrtangenten berühren.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

K. U. K. HOFBUCHDRUCKEREI A. HAASE, PRAG. — SELBSTVERLAG.